ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПОПУЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Бикунина Н.И.,
Чудинов В.В., канд. ф.-м. наук, доцент
г.Бирск, ФГБОУ ВО Бирский филиал БашГУ

Достаточно много моделей в биологии описываются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Они позволяют описывать поведение динамических систем и прогнозировать их дальнейшее поведение.

Модели роста популяции с запаздывающим аргументом позволяют учитывать в биологических системах время, которое требуется для достижения половозрелого возраста и для вынашивания плода.

Подобные модели описываются дифференциальным уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t)\left(1 - \dfrac{N(t-\tau)}{N_{\max}}\right), \\ N(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau \le t \le t_0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $N(t)$ - численность популяции, t - время, $\tau > 0$ - запаздывающий параметр, α - положительная константа, $N_{\max}$ - емкость среды, которая определяется количеством доступных ресурсов, необходимых для поддержания жизни, $\varphi(t)$ - начальное условие.

Систему (1) будем решать методом шагов.

На первом шаге получим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = \alpha N_1\left(1 - \dfrac{\varphi(t)}{N_{\max}}\right), \\ N_1(t_0) = \varphi(t_0), \end{cases} \qquad (2)$$

Откуда находим решение на первом шаге $N_1(t) = C_1 \cdot e^{\alpha t - \frac{\alpha}{N_{\max}}\int \varphi(t)dt}$.

Тогда на втором шаге имеем также задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dN_2}{dt} = \alpha N_2 \left(1 - \dfrac{N_1(t)}{N_{\max}}\right), \\ N_2(t_0) = N_1(t_0), \end{cases} \tag{3}$$

где $N_2(t_0) = N_1(t_0)$ - начальное условие и условие неразрывности. Решая систему (3), получаем решение на втором шаге $N_2(t) = C_2 \cdot e^{\alpha t - \frac{\alpha}{N_{\max}} \int N_1(t)dt}$.

Таким образом, на каждом шаге мы получаем задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Продолжая пошаговый процесс, получаем систему функций

$$N_1(t), N_2(t), \ldots, N_n(t), \ldots, \tag{4}$$

Правые части всех дифференциальных уравнений (1)-(3) удовлетворяют условиям теоремы Коши о существовании и единственности решения, если функции $N(t)$ и $\varphi(t)$ принадлежат классу непрерывных функций $C([t_0;+\infty))$.

Этот же алгоритм метода шагов можно использовать для построения численного решения системы (1). Разбивая расчетный отрезок $[t_0;T]$ на части кратные запаздыванию τ, получаем последовательные задачи Коши, которые решаются методом Рунге-Кутта. При этом время T может быть не кратным запаздыванию τ. Тогда расчетный отрезок выбирается таким образом: $[t_0;n \cdot \tau]$, где $(n-1) \cdot \tau \le T \le n \cdot \tau$. Важной особенностью применения метода шагов является идентичная разбивка на шаги для метода Рунге-Кутта на каждом из шагов по запаздыванию. Сходимость метода Рунге-Кутта обеспечивает условие существования и непрерывности производных функций $N = N(t)$ до порядка 4 включительно.

В соответствии с данной математической моделью и алгоритмом метода шагов нами разработана программа, которая численно реализует популяционную модель с запаздыванием.

Для различных значений коэффициента рождаемости α результаты решения системы (1) представлены на рисунках 1 и 2 при $\tau = 1$.

Расчеты показали, что при малом значении α мы получаем решение близкое к решению уравнения ограниченного роста. При $\alpha = 1,2$ наблюдаем логистический характер решения системы (1). В отсутствии запаздывания решение системы (1) не демонстрирует колебательных явлений.

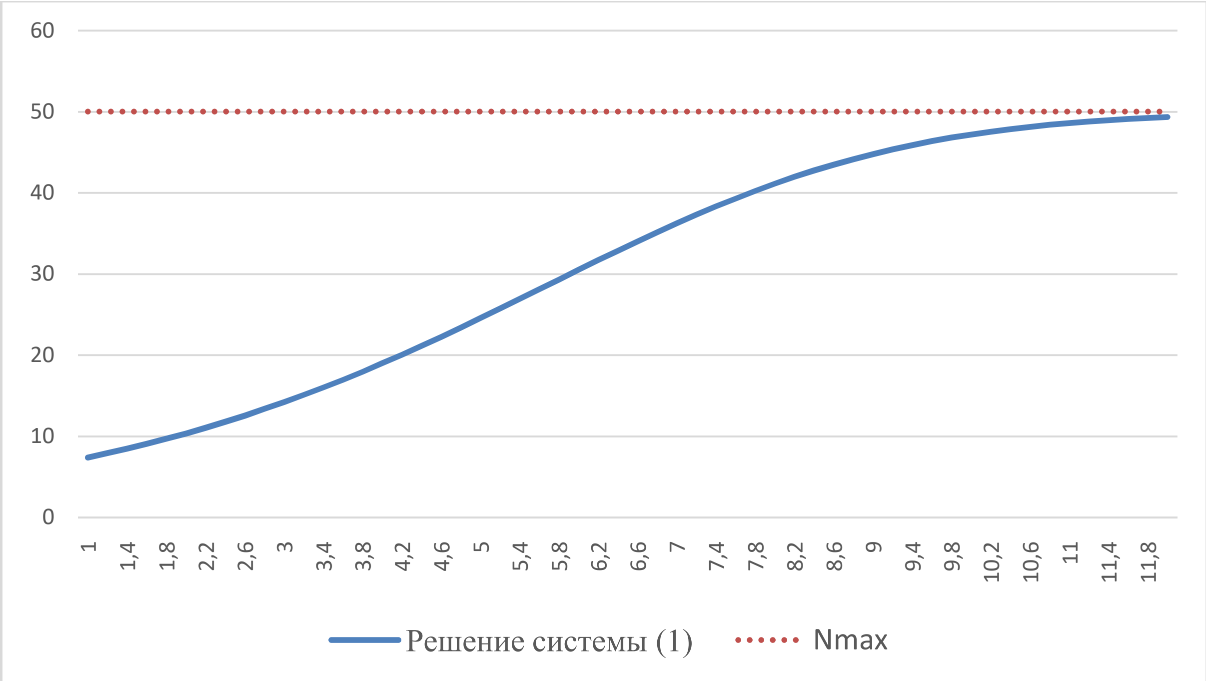

Рис. 1. Решение системы (1) при $\alpha = 0,4$ и $N_{\max} = 50$

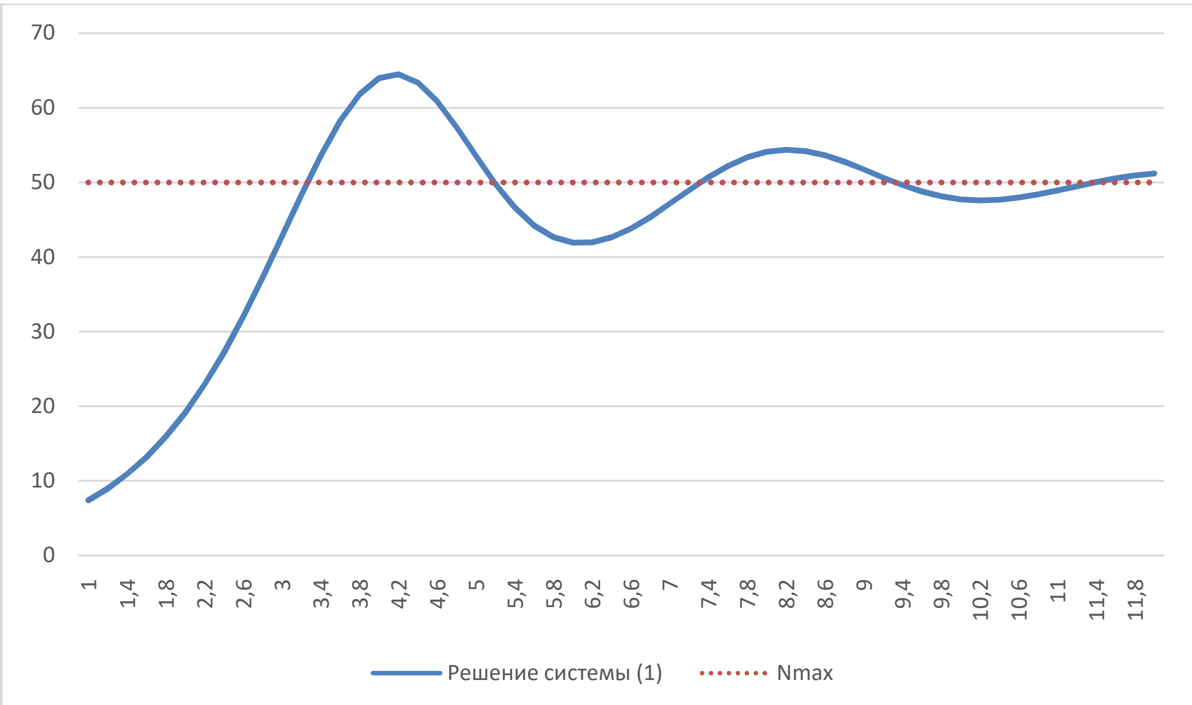

Рис. 2. Решение системы (1) при $\alpha = 1,2$ и $N_{\max} = 50$

Предложенный расчётный алгоритм также легко реализуется в Excel. При использование малого количества расчетных точек < 10 достаточно применение численного метода Эйлера.

Данный алгоритм и программу можно использовать в качестве задачных постановок для обучающихся по направлениям «Прикладная математика» и «Прикладная математика и информатика», а также в качестве демонстрационной задачи для будущих биологов и экологов.

Литература

1. Математическая биология. Том I. Введение. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 776 с.